131 développements pour l'oral – Lesesvre

Forme normale de Smith

122 155
142
152

Théorème : (forme normale de Smith) Soit A anneau euclidien, δ un stathme sur A, $m,n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$.

Alors : $\exists P,Q \in GL_m(A)\times GL_n(A) \mid PMQ = \begin{pmatrix} f_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & f_r & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$

avec $f_1, \dots, f_r \in A$ tels que : $f_1 | \dots | f_r$ uniques modulo les inversibles de A.

Preuve :

oral

L'idée pour ce développement est de montrer l'existence par récurrence sur $m+n$ en exploitant la structure d'anneau euclidien de A puis de montrer l'unicité des $f_1, \dots, f_r$ modulo les inversibles de A en utilisant les mineurs de taille k de M et en utilisant la multilinéarité du déterminant.

① Montrons que $\exists f_1 \in A \mid \exists P,Q \in GL_m(A)\times GL_n(A) \mid$
$PMQ = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{V} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ tel que $\forall i,j \in [\![1;m-1]\!]\times[\![1;n-1]\!]$, $f_1 | v_{i,j}$.

- Si $M=0$, alors $f_1 = 0$ convient
- Sinon, soit $X = \mathrm{Orb}(M)$ pour l'action par équivalence i.e. les matrices équivalentes à M.

Soit $f_1 \in A\setminus\{0\}$ tel que $\forall U = (u_{i,j}) \in X$, $\forall i,j$, $\delta(f_1) \leq \delta(u_{i,j})$

f_1 existe bien car δ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(on peut prendre par exemple f_1 le PGCD des coefficients de M)

Soit $U = (u_{i,j}) \in X$ telle que : $\exists i,j \mid u_{i,j} = f_1$.

Quitte à permuter les lignes et les colonnes,

q.p.s. $U = \begin{pmatrix} f_1 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ u_{m,1} & & \cdots & u_{m,n} \end{pmatrix}$

On réalise la division euclidienne par C_1 :

$\forall i \in [\![2;m]\!]$, $\exists q_i, r_i \in A \mid u_{i,1} = q_i f_1 + r_i$ avec $\delta(r_i) < \delta(f_1)$

$L_i \leftarrow L_i - q_i L_1$ $\begin{pmatrix} f_1 & \\ r_2 & \\ \vdots & \boxed{(*)} \\ r_m & \end{pmatrix}$

Par minimalité de f_1, $r_2 = \dots = r_m = 0$

On réalise la division euclidienne par L_1

$\forall j \in [\![2;n]\!]$, $\exists q_j, r_j \in A \mid u_{1,j} = q_j f_1 + r_j$ avec $\delta(r_j) < \delta(f_1)$

$C_j \leftarrow C_j - q_j C_1$ $\begin{pmatrix} f_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{(*)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

Par minimalité de f_1, $r_2 = \dots = r_n = 0$.

Ainsi, U est équivalente à $\begin{pmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{V = (v_{i,j})} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

Montrons que $\forall i,j$, $f_1 | v_{i,j}$

Soit $i \in [\![2;m]\!]$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_i$ $\begin{pmatrix} f_1 & v_{i,2} & \cdots & v_{i,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{(*)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

On réalise la division euclidienne par L_1

$\forall j \in [\![2;n]\!]$, $\exists q_j, r_j \in A \mid v_{i,j} = q_j f_1 + r_j$ avec $\delta(r_j) < \delta(f_1)$

$C_j \leftarrow C_j - q_j C_1$ $\begin{pmatrix} f_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{(*)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

Par minimalité de f_1, $r_2 = \dots = r_n = 0$

Ainsi, $\forall j \in [\![2;n]\!]$, $v_{i,j} = q_j f_1$.

Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![2;m]\!]$, on a bien : $\forall i,j$, $f_1 | v_{i,j}$

② Montrons l'existence

On raisonne par récurrence sur $m+n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$.

* <u>Initialisation</u> : Pour $m+n=2$, $M \in \mathcal{M}_{1,1}(A)$. OK

* <u>Hérédité</u> : Soit $n,m \in \mathbb{N}^*$ tels que $m+n \geq 3$.

Supposons que pour tout $p,q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p+q = m+n-1$, pour tout $N \in \mathcal{M}_{p,q}(A)$, N est équivalente à une certaine matrice $\begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & h_s & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ avec $h_1 | \dots | h_s$.

- Si $m=1$ ou $n=1$, alors par ce qui précède, ok.
- Sinon, par ce qui précède, M est équivalente à $D := \begin{pmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{f_1 M'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Par hypothèse de récurrence, M' est équivalente à $\begin{pmatrix} f_2' & & & \\ & \ddots & & \\ & & f_r' & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ avec $f_2' | \dots | f_r'$.

Soit $(f_j = f_1 f_j')_{j=2}^{r}$ de sorte que : $f_1 | \dots | f_r$

Ainsi, M est équivalente à $\begin{pmatrix} f_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & f_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

③ Montrons l'unicité modulo les inverses.

Soit $k \in [\![1;\min(m;n)]\!]$, $I_k(M)$ l'idéal engendré par les mineurs de taille k de M.

Montrons que $\forall P,Q \in GL_m(A) \times GL_n(A), I_k(M) = I_k(PMQ)$

Soit $P,Q \in GL_m(A) \times GL_n(A)$.

Par multilinéarité du déterminant, les mineurs de taille k de PM sont des combinaisons linéaires de mineurs de taille k de M.

En particulier, $I_k(PM) \subseteq I_k(M)$. De même à droite.

En notant $N = PMQ$, on a:

$$I_k(N) = I_k(P(MQ)) \subseteq I_k(MQ) \subseteq I_k(M)$$

De même $I_k(M) = I_k(P^{-1}NQ^{-1}) \subseteq I_k(N)$.

En particulier, pour $N = S$ la forme normale de Smith de M,

$$I_k(M) = I_k(S) = \begin{cases} \langle f_1 \times \dots \times f_k \rangle & \text{si } k \in [\![1;r]\!] \\ 0 & \text{si } k \in [\![r+1;\min(n;m)]\!] \end{cases}$$

Soit alors S, S' deux formes normales de Smith de M.

Alors: $\forall k \in [\![1;r]\!], \langle f_1 \times \dots \times f_k \rangle = \langle f_1' \times \dots \times f_k' \rangle$

Puisque le PGCD est unique à un inversible près,

$$\exists u_1, \dots, u_r \in A^\times \mid \begin{cases} f_1' = u_1 f_1 \\ \vdots \\ f_1' \times \dots \times f_r' = u_r f_1 \times \dots \times f_r \end{cases}$$

Ainsi, $\forall j \in [\![1;r]\!], \exists u_j' \in A^\times \mid f_j' = u_j' f_j$.

Exemple: Comment obtenir une matrice semblable à partir de la forme normale de Smith?

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $XI_n - M = \begin{pmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 4 & 1 & X+1 \end{pmatrix}$

Pour $i \in [\![1;n]\!]$, calculer les $\mu_i(XI_n - M)$ qui sont les PGCD des mineurs d'ordre i de $XI_n - M$.

$\mu_1(XI_n - M) = 1$

$\mu_2(XI_n - M) = X-1$

$\mu_3(XI_n - M) = (X-1)^2(X+1)$

ici, $2 = n-r+1$
$= \min\{i \in [\![1;n]\!] \mid \mu_i \neq 1\}$
d'où: $r = 2$

Pour $i \in [\![1;r]\!]$, calculer les $\chi_{M,i} = \dfrac{\mu_{n-r+i}}{\mu_{n-r+i-1}}$ qui sont les invariants de similitude !

$\chi_{M,1} = X-1$

$\chi_{M,2} = (X-1)(X+1)$

Finalement, M est semblable à $\begin{pmatrix} C_{\chi_{M,1}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & C_{\chi_{M,r}} \end{pmatrix}$

ici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Temps: 14' 37'' ... échelle ... speed/spoon ...